Aufgaben zu Kreisen und Kreisteilen

Kreisfläche: $A = \pi \cdot r^2$ (r = Radius des Kreises)

Kreisumfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

Kreisringfläche: $A = \pi \cdot \left(r^2_{\text{außen}} - r^2_{\text{innen}}\right)$

Kreisausschnitt / Kreissektor: $\alpha =$ Öffnungswinkel , b = Kreisbogen

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{1}{2} b \cdot r$$

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$$

Kreisabschnitt / Kreissegment: $A = A_{\text{Kreisausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}}$

Aufgabe 1:
Die Räder eines Fahrrads haben einen Durchmesser von 80 cm.
a) Wie viele Umdrehungen macht das Rad auf einem km ? Runde das Ergebnis auf ganze Umdrehungen.
b) Da die Räder nicht genügend aufgepumpt sind, verringert sich der Durchmesser um 2 cm. Wie viele Umdrehungen braucht das Rad jetzt pro km ?
c) Der Kilometerzähler des Rades ist auf die Radgröße von 80 cm geeicht. Du bist nach dem Kilometerzähler 40 km gefahren. Welche Strecke hast du wirklich zurückgelegt, wenn am Durchmesser der Räder durch schlechtes Aufpumpen 2 cm fehlen ?
d) Wie viele km müsstest du nach dem Kilometerzähler fahren, um mit dem schlecht aufgepumpten Fahrrad tatsächlich 40 km zurückzulegen ?

Aufgabe 2:
Die Erde hat einen Radius von etwa 6370 km.
a) Wie lang ist der Äquator ?
b) Nimm an, der Äquator sei 40.000 km lang. Es wird ein Seil um den Äquator gespannt. Wir verlängern das Seil um 1m . Wie breit ist jetzt der Abstand zwischen Erde und Seil ?

Aufgabe 3:
Beim Ausstechen von runden Weihnachtsplätzchen mit einem Durchmesser von 6 cm kommt Nina auf die Idee, aus dem Teig von 4 solchen Plätzchen einen großen runden Keks zu formen. Welchen Durchmesser wird er haben, wenn man davon ausgeht, dass der Teig gleich bleibend dick ausgerollt wird ?

Aufgabe 4:
An einem alten Webstuhl sind zwei Räder mit den Durchmessern $d_1 = 26$ cm und $d_2 = 91$ cm über einen Lederriemen miteinander verbunden. Wie oft muss sich Rad 1 drehen, damit Rad 2 eine volle Umdrehung macht ?

Aufgabe 5:
Der große Zeiger einer Uhr ist 3 cm, der kleine 2 cm lang. Berechne die Wege beider Zeigerspitzen nach 12 Stunden.

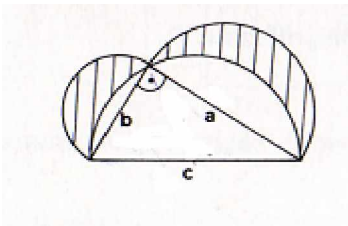
Aufgabe 6:
a) Der Umfang eines kreisrunden Teiches beträgt 150 m . Wie groß ist seine Fläche ?
b) Um den Teich führt ein 2 m breiter Weg. Bestimme seine Fläche.

Aufgabe 7:
Berechne die fehlenden Größen bei einem Kreisausschnitt:

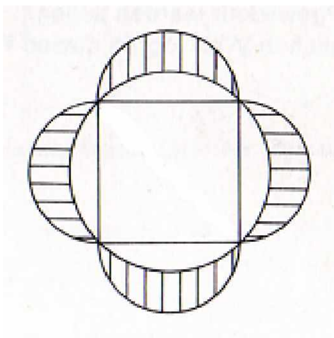
	a)	b)	c)	d)
α	60°	90°		
r			10 cm	
b	84cm			50 cm
A		400 cm²	50 cm²	250 cm²

Aufgabe 8:
Der große Zeiger einer Uhr ist 4 cm, der kleine 3 cm lang.
a) Welchen Gesamtweg haben die beiden Zeigerspitzen nach 1 Stunde zurückgelegt ?
b) Welche Gesamtfläche überstreichen dabei die Zeiger ?

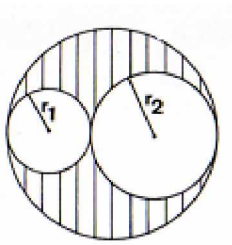
Aufgabe 9:
Zeige, dass die schraffierte Fläche denselben Flächeninhalt besitzt wie
a) das rechtwinklige Dreieck.



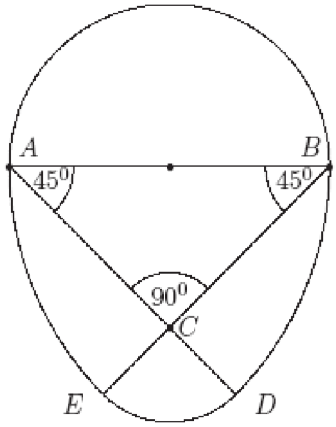
b) das Quadrat



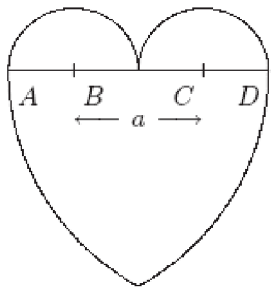
Aufgabe 10:
Der Radius r_2 des großen Kreises beträgt 10 cm, der des kleinen $r_1 = 3$ cm.
a) Wie groß ist die schraffierte Fläche ?
b) Berechne den Umfang des ganz großen Kreises und den Gesamtumfang der beiden kleinen Kreise und vergleiche sie.



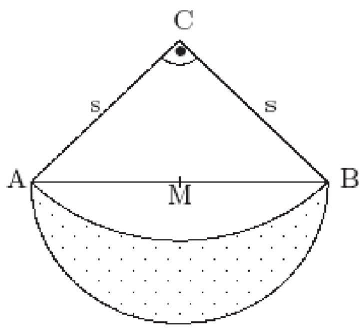
Aufgabe 11:
Das abgebildete „Osterei“ besteht aus Kreisbögen mit den Mittelpunkten A, B, C und M (M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$).
Bestimme die Fläche der Figur in Abhängigkeit von $r = \overline{AM}$.



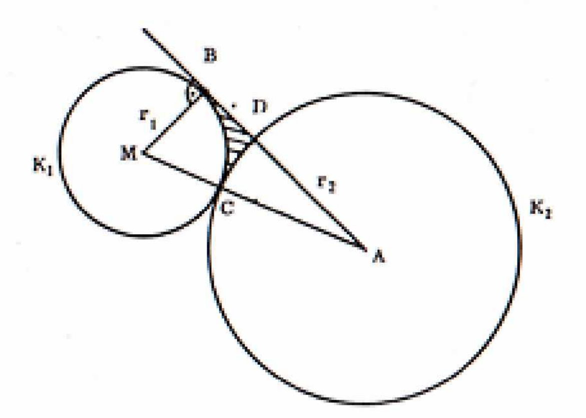
Aufgabe 12:
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von a. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind A, B, C und D.



Aufgabe 13:
Berechne den Flächeninhalt der punktierten Sichel in Abhängigkeit von s.



Aufgabe 14:
In der Figur ist (AB) die Kreistangente am K_1 in B. Der Kreis K_2 mit Mittelpunkt A berührt den Kreis K_1 in C. Ferner ist $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$. Die Länge des Bogens von B nach C beträgt 5,56 cm.



Musterlösung

Aufgabe 1:

a) Umfang des Rades = $2 \cdot \pi \cdot r = 80\pi = 251{,}33$ cm = 2,5133 m

Anzahl Umdrehungen = $\frac{1000m}{2{,}5133m} = 398$ Umdrehungen

b) Umfang des Rades = $2 \cdot \pi \cdot r = 78\pi = 245{,}04$ cm = 2,4504 m

Anzahl Umdrehungen = $\frac{1000m}{2{,}4504m} = 408$ Umdrehungen

c) Wenn der Kilometerzähler 40 km anzeigt, hat das Rad bei einem Umfang von 80 cm dann $\frac{40000m}{2{,}5133m} = 15915{,}33$ Umdrehungen zurückgelegt.

Bei einem Durchmesser von 78 cm (Umfang gemäß b) von 2,4504 m) ist die tatsächliche Strecke $15915{,}33 \cdot 2{,}4504 = 38999m$, also nur knapp 39 km lang.

d) Um tatsächlich 40 km zu fahren, müsste das Rad $\frac{40000m}{2{,}4504m} = 16323{,}9$ Umdrehungen zurücklegen, laut Kilometerzähler würde damit eine Strecke von $16323{,}9 \cdot 2{,}5133m = 41026{,}9m = 41$ km zurückgelegt.

Aufgabe 2:

a) Der Äquator ist $U = 2 \cdot \pi \cdot 6370km = 40023{,}9$ km lang.

b) Bei einer Länge des Äquators von 40.000km gilt für den Erdradius $40000 = 2\pi \cdot r_E \Rightarrow r_E = 6366{,}197724$ km.

Die Verlängerung des Seils um 1 m bewirkt, dass der Umfang des Seils U = 40000,001 km beträgt.

Der zugehörige Radius des Seilkreises beträgt $r_S = \frac{40000{,}001}{2\pi} = 6366{,}197883$ km.

Der Abstand beträgt $r_S - r_E = 6366{,}197883 - 6366{,}197724 = 0{,}000159$ km = 15,9 cm.

Hinweis: Der Abstand würde auch 15,9 cm betragen, wenn das Seil anstatt um die Erde z.B. um einen Tischtennisball gelegt würde. Die Lösung ist erstaunlicherweise unabhängig vom gegebenen Radius der Kugel.

Aufgabe 3:

Die Fläche von 4 solchen Plätzchen beträgt $A = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$ cm².

Der runde Keks hat somit genau diese Fläche: $36\pi = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 6$ cm

Der Keks hätte einen Radius von r = 6 cm bzw. einen Durchmesser von d = 12 cm.

Aufgabe 4:

Für den Umfang der Räder gilt $U_1 = 2\pi \cdot 13 = 26\pi$ cm und $U_2 = 2\pi \cdot 45{,}5 = 91\pi$ cm.

Es gilt $\frac{U_2}{U_1} = 3{,}5$. Somit muss Rad 1 3,5 Umdrehungen machen, damit sich Rad 2 einmal dreht.

Aufgabe 5:
Weg kleiner Zeiger = 1 Umdrehung = $2\pi \cdot 2 = 12{,}57$ cm.
Weg großer Zeiger = 12 Umdrehungen = $2\pi \cdot 3 \cdot 12 = 226{,}2$ cm.

Aufgabe 6:

a) $U = 150m = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{150}{2\pi} = 23{,}87m$

Fläche = $\pi \cdot 23{,}87^2 = 1790$ m².

b) Die Wegfläche entspricht der Fläche eines Kreisringes:
$A = \pi \cdot (r^2{}_{außen} - r^2{}_{innen}) = \pi \cdot (25{,}87^2 - 23{,}87^2) = 312{,}53$ m².

Aufgabe 7:

a) $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} \Rightarrow 84 = \frac{\pi \cdot r \cdot 60°}{180°} \Rightarrow r = \frac{252}{\pi} = 80{,}2$ cm.

$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot 80{,}2^2 \cdot \frac{60}{360} = 3367{,}8$ cm²

b) $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 400 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{90}{360} \Rightarrow r = 22{,}57$ cm.

$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 22{,}57 \cdot 90°}{180°} = 35{,}45$ cm

c) $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 50 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha = 57{,}3°$

$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 57{,}3°}{180°} = 10$ cm

d) $A = \frac{1}{2} b \cdot r \Rightarrow 250 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot r \Rightarrow r = 10$ cm.

$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 250 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha = 286{,}5°$

Aufgabe 8:

a) Weg großer Zeiger = 1 Umdrehung = $2\pi \cdot 4 = 25{,}13$ cm

Weg kleiner Zeiger = $\frac{1}{12}$ Umdrehung = $2\pi \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 1{,}57$ cm.

Gesamtweg = 25,13 cm + 1,57 cm = 26,7 cm.

b) Fläche großer Zeiger = $\pi \cdot 4^2 = 50{,}27$ cm².

Fläche kleiner Zeiger = $\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{12} = 2{,}36$ cm².

Gesamtfläche = 50,27 cm² + 2,36 cm² = 52,63 cm².

Aufgabe 9:

a) Fläche des rechtwinkligen Dreiecks: $A = \frac{1}{2} a \cdot b$

Schraffierte Fläche = Fläche des Halbkreises über b
+ Fläche des Halbkreises über a
- (Segmentteil über b + Segmentteil über a)

Halbkreis über b = $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot b^2$

Halbkreis über a = $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot a^2$

Segmentteil über a + Segmentteil über b = Halbkreisfläche über c – Dreiecksfläche

$= \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - \frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}\pi \cdot c^2 - \frac{1}{2}ab$ (*)

Mit dem Satz des Pythagoras folgt $c^2 = a^2 + b^2$

Aus (*) folgt $\frac{1}{8}\pi \cdot (a^2 + b^2) - \frac{1}{2}ab$

Schraffierte Fläche = $\frac{1}{8}\pi \cdot b^2 + \frac{1}{8}\pi \cdot a^2 - (\frac{1}{8}\pi \cdot (a^2 + b^2) - \frac{1}{2}ab) = \frac{1}{2}ab$

Damit ist die schraffierte Fläche gleich groß wie das rechtwinklige Dreieck.

b) Die Seitenlänge des Quadrats sei a.
Fläche des Quadrats $A = a^2$.

Schraffierte Fläche = 4 Halbkreise – Fläche großer Kreis + Quadratfläche

Der Radius der Halbkreise ist $r = \frac{a}{2}$, der Radius des großen Kreises entspricht der halben Diagonale des Quadrats $r = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2}$ (aus Formelsammlung oder mit Pythagoras)

Schraffierte Fläche $= 4 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 2\pi \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot a^2 + a^2 = a^2$

Damit ist die schraffierte Fläche genauso groß wie die des Quadrats.

Aufgabe 10:

a) Der große Kreis besitzt den Durchmesser $d = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 = 26\,\text{cm}$ und damit den Radius r = 13 cm.
Schraffierte Fläche = $\pi \cdot 13^2 - \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 3^2 = 188{,}5\,\text{cm}^2$.

b) Umfang großer Kreis = $2 \cdot \pi \cdot 13 = 26\pi$ cm
Umfang der kleinen Kreise = $2\pi \cdot 10 + 2\pi \cdot 3 = 26\pi$ cm
Die Umfänge sind gleich groß.

Aufgabe 11:

Das Osterei besteht aus folgende Flächen:
Halbkreis mit Radius r + rechtwinkliges Dreieck ABC + Fläche ACE + Fläche BCD
+ Kreisausschnitt CDE

Halbkreis mit Radius r: $A = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2$

Rechtwinkliges Dreieck ABC: Die Hypotenuse besitzt die Länge $\overline{AB} = 2r$.

Für die Kathetenlänge x gilt: $x^2 + x^2 = (2r)^2 \Rightarrow x = r \cdot \sqrt{2}$

Dreiecksfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} = r^2$

Fläche ACE = Fläche BCD = Kreisausschnitt abzüglich Dreiecksfläche

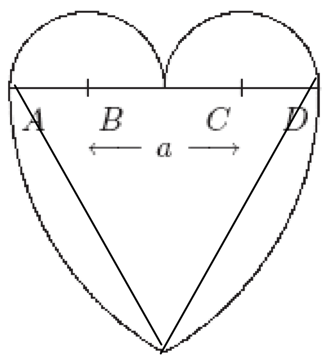
$$A = \pi \cdot (2r)^2 \cdot \frac{45°}{360°} - 2r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 - r^2$$

Kreisausschnitt CDE: Der Radius des Ausschnitts lautet $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = 2r - r \cdot \sqrt{2}$

$$A = \pi \cdot (2r - r \cdot \sqrt{2})^2 \cdot \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}\pi \cdot (4r^2 - 4r^2\sqrt{2} + 2r^2) = \frac{3}{2}\pi \cdot r^2 - \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Gesamtfläche} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + r^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 - r^2\right) + \frac{3}{2}\pi \cdot r^2 - \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{2}$$
$$= \pi \cdot r^2 (0{,}5 + 1 + 1{,}5 - \sqrt{2}) - r^2 = \pi \cdot r^2 (3 - \sqrt{2}) - r^2$$

Aufgabe 12:



Die Fläche setzt sich zusammen aus:
2 Halbkreise + gleichseitiges Dreieck + 2 Segmente

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot a^2$$

$$A_{Dreieck} = \frac{(2a)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = a^2 \cdot \sqrt{3} \quad \text{(Formelsammlung)}$$

$$A_{Segment} = \pi \cdot (2a)^2 \cdot \frac{60°}{360°} - a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi \cdot a^2 - a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Gesamtfläche} = 2 \cdot \frac{1}{8}\pi \cdot a^2 + a^2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\pi \cdot a^2 - a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{19}{12}\pi \cdot a^2 - a^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= a^2 \cdot \left(\frac{19}{12}\pi - \sqrt{3}\right)$$

$$\text{Umfang} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot (2\pi \cdot 2a \cdot \frac{60°}{360°}) = \pi \cdot a + \frac{4}{3}\pi \cdot a = \frac{7}{3}\pi \cdot a$$

Aufgabe 13:
Fläche der Sichel = Fläche des rechtwinkligen Dreiecks + Fläche des Halbkreises
- Fläche des Kreisausschnittes

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}s^2$

Es gilt $\overline{AB} = s \cdot \sqrt{2}$ (entweder über Formel der Diagonale eines Quadrates oder mit Pythagoras).

Der Halbkreis besitzt den Radius $r = \overline{MA} = \frac{1}{2}s \cdot \sqrt{2}$.

$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}s \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{4}s^2 \cdot 2 = \frac{1}{4}\pi \cdot s^2$

$A_{Kreisausschnitt} = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}\pi \cdot s^2$

Sichelfläche = $\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot s^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot s^2 = \frac{1}{2}s^2$

Aufgabe 14:
Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $\overline{AM} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\text{cm}$.
Da der Radius von K_1 der Strecke $\overline{MB} = r_1 = 6\,\text{cm}$ entspricht, gilt für den Radius von K_2
$r_2 = \overline{AC} = \overline{AM} - 6 = 4\,\text{cm}$.

Weiterhin gilt: $b = 5{,}56 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{5{,}56 \cdot 360}{2\pi \cdot 6} = \alpha \Rightarrow \alpha = 53{,}1°$

Mit Hilfe der Winkelsumme des Dreiecks AMB kann der Winkel β des Kreisausschnitts ADC ermittelt werden: $\beta = 180° - 90° - 53{,}1° = 36{,}9°$.

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\,\text{cm}^2$

$A_{Ausschnitt\_MBC} = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{53{,}1}{360°} = 16{,}68\,\text{cm}^2$

$A_{Ausschnitt\_MBC} = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{36{,}9}{360°} = 5{,}15\,\text{cm}^2$.

Schraffierte Fläche = 24 – 16,68 – 5,15 = 2,17 cm².